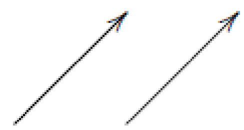
Powtórzenie wiadomości

Wektory

Spojrzenie geometryczne

Wektor definiuje się określając jego **długośc** (wielkość, normę)i **kierunek**. Geometrycznie wektory reprezentowane są przez strzałki na płaszczyźnie lub w przestrzeni. Długość strzałki jest długością wektora a kierunek strzałki jest kierunkiem wektora. Jeśli mamy dwa wektory o takiej samej długości i leżące na prostych równoległych ale takich że groty reprezentujących je strzałek są przeciwnie skierowane, to mówimy, że oba wektory mają ten sam kierunek ale przeciwne zwroty.

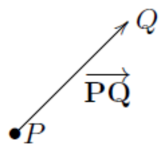
Dwie strzałki mające taką samą długość kierunek i zwrot reprezentują ten sam wektor.



Rys. 1. Obie strzałki reprezentują ten sam wektor.

Wektor między dwoma punktami P i Q będziemy oznaczać przez $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$.

Pinkt P nazywamy początkiem wektora (punktem początkowym) a pinkt Q końcem wektora (punktem końcowym).

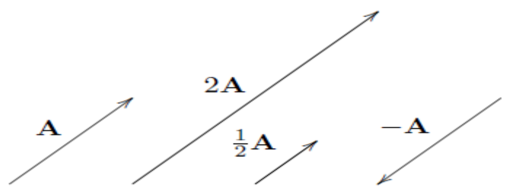


Rys. 2. Wektor z punktu P do punktu Q.

Długość wektora A będziemy oznaczać przez $|\mathrm{A}|$. Będziemy także zamiennie nazywać długość wektora słowem **norma**.

Skalowanie, dodawanie i odejmowanie wektorów

Skalowanie wektora oznacza zmianę jego długości zgodnie z czynnikiem skalowania. Jeśli czynnik skalowania jest równy 2, to długość przeskalowanego wektora jest dwa razy większa.

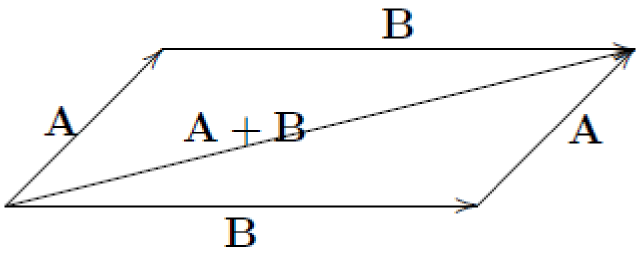


Rys. 3. Przykłady skalowania wektorów.

Przy skalowaniu kierunej wektora się nie zmienia, może się zmienić jego zwrot i długość.

Ponieważ jako czynników skalowania używamy licb rzeczywistych, to będziemy je określać słowem **skalar.**

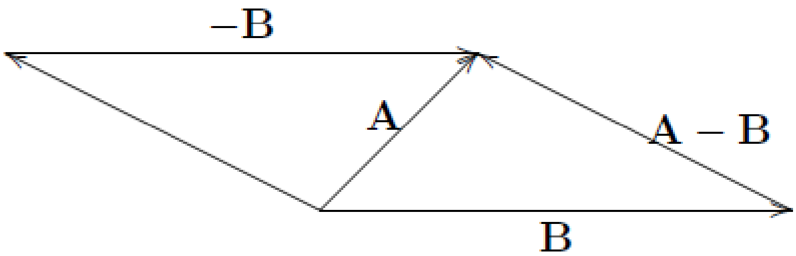
Wektory **dodaje się** imieszczając początek jednego wektora w punkcie końcowym drugiego. Jak pokazuje rysunek 4 można to zrobić w dowolnym porządku.



Rys. 4. Dodawanie wektorów.

Można myśleć o wektorach jako operacjach przemieszczenia. W ten sposób o $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ możemy myśleć jako o przemieszczeniu (przesunięciu) A, po którym następuje przesunięcie B.

Operację odejmowania wektorów A i B realizuje się jako $\mathrm{A}+(-\mathrm{B})$.



Rys. 5. Odejmowanie wektorów.

Operację odejmowania $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ można rozumieć jako przemieszczenie z punktu końcowego wektora B do punktu końcowego wektora A.

Spojrzenie algebraiczne

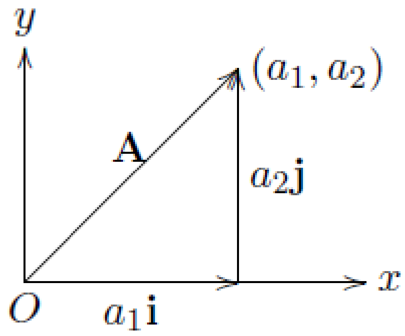
Początek układu współrzędnych oznaczamy literą O. Na płaszczyźnie $O=(0,0)$ a w trójwymiarowej przestrzeni $O=(0,0,0)$.

Na płaszczyźnie jeśli umieścimy początek wektora w początku układu współrzędnych, to jego koniec będzie w punkcie o współrzędnych np. (a_1,a_2). W ten sposób współrzędne końca wektora określają cały wektor (jeśli jest zaczepiony w O). Jeśli rysujemy wrktor zaczepiony w początku układu współrzędnych, to mówimy o takim wektorze że jest **związany**.

Używając współrzędnych piszemy w takim przypadku $\mathrm{A}=\langle a_1,a_2\rangle$.

Dodawanie, skalowanie i odejmowanie z użyciem współrzędnych jest omówione poniżej.

Graficznie:



Rys. 6. Wektor związany w układzie współrzędnych.

Wektory i oraz j użyte na rysunku 6 mają współrzędne $\mathrm{i} = \langle 1, 0 \rangle$ i $\mathrm{j} = \langle 0, 1 \rangle$. Ponieważ są często używane to doczekały się własnych symboli. Nazywamy je wektorami jednostkowymi osi Ox i Oy odpowiednio.

Notacja i terminologia

1. (a_1, a_2) oznacza punkt na płaszczyźnie.
2. $\langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j}$ jest wektorem zaczepionym w początku układu o końcu w punkcie (a_1, a_2).
3. Dla $\mathrm{A} = a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j}$, a_1 oraz a_2 są nazywane i-tą i j-tą składową wektora A. (zauważmy, że są to skalary).
4. $\vec{\mathrm{P}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ jest wektorem z początku układu do punktu P.
5. Pisząc na tablicy często umieszczamy strzałki nad literą dla zaznaczenia, że chodzi o wektor. W dokumentach drukowanych czasem można się spotkać z prostymi i pogrubionymi literami np. $\mathrm{P} = \vec{\mathrm{P}}$.
6. Liczba rzeczywista jest skalarem, którego można użyć jako czynnika skalującego wektor.

Algebra wektorów z użyciem współrzędnych

Dla wektorów $\mathrm{A} = a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j}$ oraz $\mathrm{B} = b_1\mathrm{i} + b_2\mathrm{j}$ obowiązują następujące reguły działań algebraicznych. Są one przedstawione geometrycznie na kolejnych rysunkach.

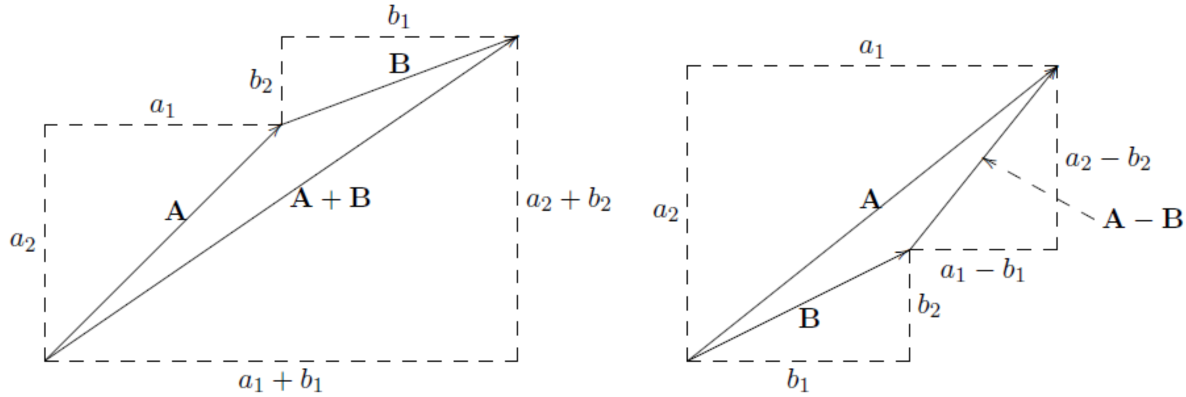
Długość wektora: $|\mathrm{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Jest to zastosowanie twierdzenia Pitagorasa.

Dodawanie wektorów: $\mathrm{A} + \mathrm{B} = (a_1 + b_1)\mathrm{i} + (b_1 + b_2)\mathrm{j}$. Inaczej mówiąc:

$$\langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1 + b_2 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle.$$

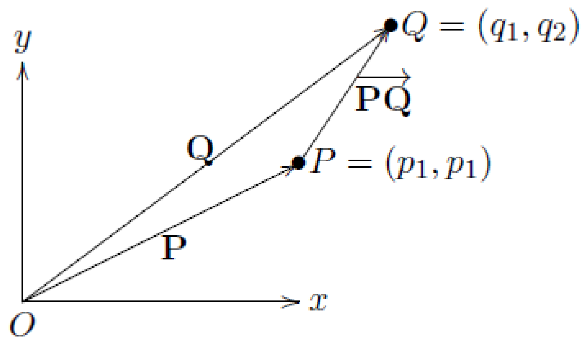
Odejmowanie wektorów: $\mathrm{A} - \mathrm{B} = (a_1 - b_1)\mathrm{i} + (a_2 - b_2)\mathrm{j}$. Inaczej mówiąc:

$$\langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle .$$



Rys. 7. Dodawanie i odejmowanie wektorów.

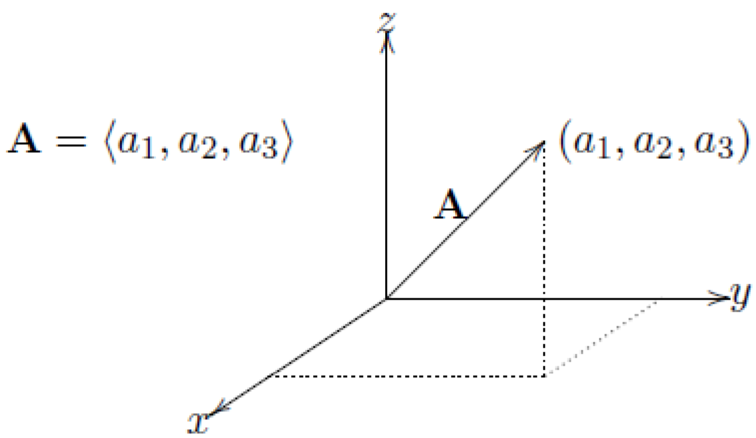
Dla dwóch punktów P i Q wektor $\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$ tzn. $\overrightarrow{PQ}$ jest przesunięciem (przemieszczeniem) z punktu P do punktu Q. Geometrycznie przedstawia to rysunek 8.



Rys. 8. Przemieszczenie z punktu P do punktu Q .

Wektory w trzech wymiarach

Wektor trójwymiarowy jest reprezentowany jako strzałka w przestrzeni trójwymiarowej. Używając współrzędnych trzeba użyć trzech liczb do rerezentowania wektora.



Rys. 9. Wektor w przestrzeni trójwymiarowej.

Geometrycznie nic się nie zmienia dla operacji skalowania dodawania i odejmowania wektorów.

Algebraicznie wektor związany $\mathrm{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ma początek w początku układu współrzędnych i dochodzi do punktu o współrzędnych (a_1, a_2, a_3). W przestrzeni trójwymiarowej mamy wektory jednostkowe na każdej z osi $\mathrm{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\mathrm{j} = \langle 0,1,0 \rangle$ oraz $\mathrm{k} = \langle 0,0,1 \rangle$. Używając tych wektorów możemy napisać:

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_3\mathrm{k}$$

Dla $\mathrm{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ i $\mathrm{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ mamy:

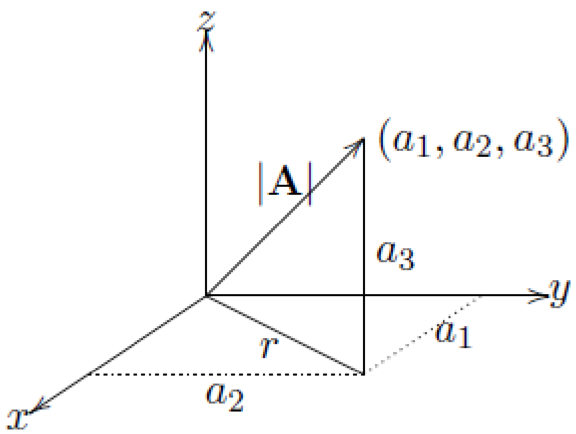
$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle + \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

dokładnie tak samo jak w przestrzeni dwuwymiarowej.

Długość wektora w przestrzeni trójwymiarowej także jest konsekwencją twierdzenia Pitagorasa.

$$|a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_3\mathrm{k}| = |\langle a_1, a_2, a_3 \rangle| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ .$$

Na rysunku 10 przedstawiono, że $|\mathrm{A}| = \sqrt{r^2 + a_3^2}$ gdzie $r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.



Rys. 10. Długość wektora w przestrzeni trójwymiarowej.

Wektory jednostkowe (unitarne)

Wektorem jednostkowym nazywamy dowolny wektor o długości jeden. Jeśli chcemy zaznaczyć, że wektor jest jednostkowy umieszczamy nad literą oznaczającą wektor „daszek” pisząc u .

Wektory i, j oraz k są jednostkowe (w ich przypadku nie umieszczamy „daszka” (ang. hat - kapelusz)).

Ponieważ wektory można skalować, każdy wektor można tak przeskalować aby miał długość równą 1.

PRZYKŁAD:

Znaleźć wektor jednostkowy równoległy do wektora $\langle 3,4\rangle$.

ODPOWIEDŹ: Ponieważ $|\langle 3,4\rangle|=5$, to wektor $\frac{1}{5}\langle 3,4\rangle=\left\langle \frac{3}{5},\frac{4}{5}\right\rangle$ ma długość równą 1 i jest równoległy do wektora $\langle 3,4\rangle$.

Iloczyn skalarny i wektorow

Iloczynem skalarnym dwóch wektorów A i B nazywamy liczbę (skalar) określoną worem:

$$AB=|A||B|\cos\alpha .$$

Gdzie α jest kątem pomiędzy wektorami.

Iloczynem wektorowym $A\times B$ nazywamy wektor C prostopadły do A i do B, taki że A, B i C tworzą układ prawoskrętny i o długości $|A|\,|B|\sin\alpha$ gdzie α jest kątem między wektorami A i B. Długość wektora C jest równa polu równoległoboku rozpietego na wektorach A i B.

Własności iloczynu skalarnego i wektorowego

1. Iloczyn skalarny jest przemienny:

$$AB=BA .$$

2. Iloczyn wektorowy zmienia znak przy przestawieniu czynników:

$$A\times B=-(B\times A).$$

3. Mnożenie przez liczbę jest łączne (dla obu iloczynów):

$$\begin{gathered}\alpha(AB)=(\alpha A)B\\ \alpha(A\times B)=(\alpha A)\times B\end{gathered}.$$

4. Mnożenie skalarne i wektorowe nie jest łączne:

$$\begin{gathered}A(BC)\neq(AB)C\\ A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C\end{gathered}.$$

5. Prawo rozdzielności mnożenia (skalarnego i wektorowego) względem dodawania:

$$\mathrm{A}(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = \mathrm{AB}+\mathrm{AC}$$
$$\mathrm{A}\times(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = \mathrm{A}\times\mathrm{B}+\mathrm{A}\times\mathrm{C}.$$

6. Ortogonalność lub prostopadłość wektorów. Dwa wektory są prostopadłe $(\mathrm{A}\perp\mathrm{B})$ jeśli:

$$\mathrm{AB}=0.$$

oraz jeśli jeden lub oba wektory są wektorami zerowymi.

7. Równoległość dwóch wektorów. Dwa wektory są równoległe $(\mathrm{A}\|\mathrm{B})$ jeśli:

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=0.$$

8. Mnożenie wektora przez siebie:

$$\mathrm{AA}=\mathrm{A}^2=|\mathrm{A}|^2,\ \mathrm{A}\times\mathrm{A}=0.$$

Kombinacje liniowe wektorów

Kombinacją liniową wektorów $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,...,\mathrm{A}_n$ o współczynnikach $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ nazywamy wyrażenie:

$$\alpha_1\mathrm{A}_1+\alpha_2\mathrm{A}_2+...+\alpha_n\mathrm{A}_n$$

Które jest symą przeskalowanych współczynnikami wektorów.

Podwójny iloczyn wektorowy

Podwójny iloczyn wektorowy $\mathrm{A}\times(\mathrm{B}\times\mathrm{C})$ jest wektorem komplanarnym (leżącym w tej samej płaszczyźnie) z wektorami B i C.

$$\mathrm{A}\times(\mathrm{B}\times\mathrm{C})=\mathrm{B}(\mathrm{AC})-\mathrm{C}(\mathrm{AB}).$$

Iloczyn mieszany

Iloczyn mieszany $(\mathrm{A}\times\mathrm{B})\mathrm{C}$, co do wartości bezwzględnej jest równy objętości równoległościanu rozpiętego na tych trzech wektorach. Jeśli A , B, C tworzą układ prawoskrętny, to ich iloczyn mieszany przyjmuje wartość dodatnią, w przeciwnym razie jest ujemny.

W przypadku gdy trzy wektory są komplanarne, wektor A jest równoległy do płaszczyzny rozpiętej na wektorach B i C, zatem:

$$\mathrm{A}(\mathrm{B}\times\mathrm{C})=0.$$

Wzory na mnożenie wektorów we współrzędnych kartezjańskich prostokątnych

Załóżmy, że wektory A, B i C zadane są przez swoje współrzędne w pewnym prostopadłym układzie współrzędnych:

$$\mathrm{A}=\left[a_x, a_y, a_z\right],\ \mathrm{B}=\left[b_x, b_y, c_z\right],\ \mathrm{C}=\left[c_x, c_y, c_z\right].$$

Zachodzą wtedy następujące wzory:

Iloczyn skalarny: $\mathrm{AB}=a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Iloczyn wektorowy: $\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\left(a_y b_z - a_z b_y\right)\mathrm{i}+\left(a_z b_x - a_x b_z\right)\mathrm{j}+\left(a_x b_y - a_y b_x\right)\mathrm{k}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$

Iloczyn mieszany: $\left(\mathrm{A}\times\mathrm{B}\right)\mathrm{C}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$